Primer Parcial Matemáticas 5 Miguel Guzman

Pregunta (1)

Sea $$f(x,y) := \begin{cases} \dfrac{y\cdot x^2 - x\cdot y^2}{2x^2 + 3y^2} & \text{if } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{if } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Determine si f(x,y) es continua, se sabe que por definicion $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$

Por lo que tan solo podemos ir a la acotacion epsilon-delta

$$\left|\frac{y\cdot x^2 - x\cdot y^2}{2x^2+3y^2} - 0\right| < \varepsilon \quad \text{implica} \quad \left|\frac{y\cdot x^2 - x\cdot y^2}{2x^2+3y^2}\right| < \left|\frac{y\cdot x^2 + x\cdot y^2}{2x^2+3y^2}\right| \le \left|\frac{y\cdot x^2}{2x^2+3y^2}\right| + \left|\frac{x\cdot y^2}{2x^2+3y^2}\right|$$

Por otro lado $2x^2 < 2x^2 + 3y^2$ y $3y^2 < 2x^2 + 3y^2$ lo que permite decir

$$\left|\frac{y\cdot x^2}{2x^2+3y^2}\right| + \left|\frac{x\cdot y^2}{2x^2+3y^2}\right| < \left|\frac{y\cdot x^2}{2x^2}\right| + \left|\frac{x\cdot y^2}{3y^2}\right| = \frac{|y|}{2} + \frac{|x|}{3}$$ de las acotaciones de delta

$|x| < \sqrt{x^2+y^2} < \delta$ y $|y| < \sqrt{x^2+y^2} < \delta$ se resume que

$$\left|\frac{y\cdot x^2 - x\cdot y^2}{2x^2+3y^2} - 0\right| < \frac{|y|}{2} + \frac{|x|}{3} < \frac{\delta}{2} + \frac{\delta}{3} = \frac{5}{6}\delta < \varepsilon$$ por lo que $\delta = \frac{6}{5}\varepsilon$ **si es continua**

b.- Buscamos el gradiente en (0,0) utilizando la definicion de la derivada parcial

$$\frac{df(x,y)}{dx} = \lim_{h\to 0}\left(\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h}\right) = \lim_{h\to 0}\left(\frac{0-0}{h}\right) = 0$$

$$\frac{df(x,y)}{dy} = \lim_{h\to 0}\left(\frac{f(0,h)-f(0,0)}{h}\right) = \lim_{h\to 0}\left(\frac{0-0}{h}\right) = 0$$

c.- Diga si f(x,y) es diferenciable se debe comprobar el limite

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\left[\frac{f(x,y) - f(0,0) - \blacksquare < \Delta f(0,0), \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} > \blacksquare}{\sqrt{x^2+y^2}}\right]$$

Por lo que queda

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \left[\frac{\left|\begin{array}{l}\dfrac{y\cdot x^2 - x\cdot y^2}{2x^2+3y^2} \text{ if } (x,y)\neq(0,0) \\ 0 \text{ if } (x,y)=(0,0)\end{array}\right. - 0 - \blacksquare < \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} > \blacksquare}{\sqrt{x^2+y^2}}\right]$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \left[\frac{\left[\left|\begin{array}{l}\dfrac{y\cdot x^2 - x\cdot y^2}{2x^2+3y^2} \text{ if } (x,y)\neq(0,0) \\ 0 \text{ if } (x,y)=(0,0)\end{array}\right.\right]}{\sqrt{x^2+y^2}}\right]$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \left[\left|\begin{array}{l}\dfrac{y\cdot x^2 - x\cdot y^2}{\left(2x^2+3y^2\right)\cdot\sqrt{x^2+y^2}} \text{ if } (x,y)\neq(0,0) \\ 0 \text{ if } (x,y)=(0,0)\end{array}\right.\right] = 0$$

Probando por rectas de ecuacion y=mx se tiene

$$\frac{y\cdot x^2 - x\cdot y^2}{\left(2x^2+3y^2\right)\cdot\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{m\cdot x\cdot x^2 - x\cdot(m\cdot x)^2}{\left[2x^2+3(m\cdot x)^2\right]\cdot\sqrt{x^2+(m\cdot x)^2}} = \frac{x^3}{\left|x^3\right|}\cdot\frac{m-m^2}{\left(2+3m^2\right)\cdot\sqrt{1+m^2}}$$

Por lo que el limite NO EXISTE,YA QUE LOS LIMITES LATERALES SON DISTINTOS.

NO ES DIFERENCIABLE.

Pregunta (2)

Dada la composicion $h = fog$ con $g(x,y,z) := \begin{pmatrix} x^2+\sin(y\cdot z) \\ -x\cdot z\cdot e^y\end{pmatrix}$ $f(1,-1) := 3$

La regla viene de la siguiente forma

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \blacksquare\xrightarrow{g} \begin{pmatrix} x^2+\sin(y\cdot z) = u \\ -x\cdot z\cdot e^y = v\end{pmatrix} \blacksquare\xrightarrow{f} R$$

por lo que

$$Dh(x,y,z) := Df(u,v)\cdot Dg(x,y,z)$$

Donde se tiene que $Df(u,v)_{1x2} := \begin{pmatrix}\dfrac{d}{du}f(u,v) & \dfrac{d}{dv}f(u,v)\end{pmatrix}$

y ademas

$$Dg(x,y,z) := \begin{pmatrix} \frac{d}{dx}g(x,y,z)_{0,0} & \frac{d}{dy}g(x,y,z)_{0,0} & \frac{d}{dz}g(x,y,z)_{0,0} \\ \frac{d}{dx}g(x,y,z)_{1,0} & \frac{d}{dy}g(x,y,z)_{1,0} & \frac{d}{dz}g(x,y,z)_{1,0} \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2\cdot x & z\cdot\cos(y\cdot z) & y\cdot\cos(y\cdot z) \\ -z\cdot e^{y} & -x\cdot z\cdot e^{y} & -x\cdot e^{y} \end{pmatrix}$$

Realizando la regla para el punto dado

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow g(1,0,1) \rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{f} 3$$

Por lo que tendremos

$$Dh(1,0,1) := Df(1,-1)\cdot Dg(1,0,1)$$

Por dato del problema el plano tangente a h en el punto (1,0,1) es paralelo al plano de normal

$$Dh(1,0,1) := (3 \quad 1 \quad -1)$$

"Se debia argumentar que: Se conoce. $Dh\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \lambda\cdot\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

Entonces debemos demostrar que λ=1

Debemos entonces despejar Df(1,-1)

Donde $Dg(1,0,1) \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$

$$(3,1,-1) := Df(1,-1)\cdot\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

recuerde que

$$Df(u,v)_{1x2} := \begin{pmatrix} \frac{d}{du}f(u,v) & \frac{d}{dv}f(u,v) \end{pmatrix}$$

$$Df(1,-1) := (2 \quad 1)$$

Realizando el producto y despejando las parciales se tiene el gradiente.

Dado a que f va de R2 a R es UNA CURVA DE NIVEL, La ecuacion del plano tangente sera

$$w - w0 := Df(u,v)\cdot\begin{pmatrix} u - u0 \\ v - v0 \end{pmatrix}$$

con $u0 := 1 \quad v0 := -1 \quad w0 := f(1,-1) = 3$

Por lo que

$$\pi := (2 \quad 1)\cdot\begin{pmatrix} u - 1 \\ v + 1 \end{pmatrix} - w + 3 \rightarrow 2\cdot u + v - w + 2$$

PLANO

b.- Argumentando que como H es composicion de f (Diferenciable) y g (diferenciale) por teorema H es diferenciable. Por lo que la derivada direccional en el punto (1,0,1) en la direccion unitaria dada sera igual al producto del gradiente por la direccion, lo que se obtiene

$$(3 \quad 1 \quad -1)\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \rightarrow 2\cdot\sqrt{2}$$

Pregunta (3)

a.- El polinomio de Taylor de primer Orden se define por la formulacion

$$f(x,y) = f(x0,y0) + Df(x0,y0)\cdot\begin{pmatrix} x - x0 \\ y - y0 \end{pmatrix}$$

Buscamos gradiente de f en (0,-2) Derivando implicitamente

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \xrightarrow{\iota} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z = f(x,y) \end{pmatrix} \xrightarrow{\phi} 0 \qquad \phi(x,y,z) := 2z + y\cdot e^{x} - x\cdot z^{2} - y^{2}$$

$$(0\ \ 0) = \begin{pmatrix} \frac{d}{dx}\phi(x,y,z) & \frac{d}{dy}\phi(x,y,z) & \frac{d}{dz}\phi(x,y,z) \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \frac{d}{dx}f(x,y) & \frac{d}{dy}f(x,y) \end{pmatrix}$$

Despejando se tendra que

$$Dxf(x,y) := \frac{\frac{d}{dx}\phi(x,y,z)}{\frac{d}{dz}\phi(x,y,z)} \rightarrow -\frac{z^{2} - y\cdot e^{x}}{2\cdot x\cdot z - 2} \qquad Dyf(x,y) := \frac{-\frac{d}{dy}\phi(x,y,z)}{\frac{d}{dz}\phi(x,y,z)} \rightarrow \frac{e^{x} - 2\cdot y}{2\cdot x\cdot z - 2}$$

Se busca el valor de z en la ecuacion $\phi(0,-2,z) \rightarrow 2\cdot z - 6$ por lo que $z := 3$

Buscando Gradiente en el punto x=0 y=-2

$$Dxf(0,-2) \rightarrow \frac{z^{2}}{2} + 1 \qquad Dyf(0,-2) \rightarrow -\frac{5}{2}$$

Sustituya z=3 en Dxf(0,-2) $Df(0,-2) := \begin{pmatrix} \frac{11}{2} & \frac{-5}{2} \end{pmatrix}$

Lo que da el desarrollo de taylor

$$f(x,y) := 3 + \begin{pmatrix} \frac{11}{2} & \frac{-5}{2} \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x \\ y + 2 \end{pmatrix} \rightarrow \frac{11\cdot x}{2} - \frac{5\cdot y}{2} - 2$$ **TAYLOR**

b.- Como conocemos la derivada con respecto a "y" volvemos a derivar con respecto a "x" recordando que z es funcion de x e y

$$Dx\left(\frac{e^{x} - 2\cdot y}{2\cdot x\cdot z - 2}\right) = \frac{e^{x}(2x\cdot z - 2) - \left(e^{x} - 2y\right)\left[2\left(z + x\cdot\frac{df(x,y)}{dx}\right)\right]}{(2x\cdot z - 2)^{2}}$$

Por lo que ya conocemos todos los valores y Dxf(0,-2)=11/2

$$DxyF(x,y,z) := \frac{e^{x}(2x\cdot z - 2) - \left(e^{x} - 2y\right)\left[2\left(z + x\cdot Df(0,-2)_{0,0}\right)\right]}{(2x\cdot z - 2)^{2}}$$

OJO: Para efectos del programa coloco z como variable pero no lo es.

$$DxyF(0,-2,3) \rightarrow -8$$

RESPUESTA

Pregunta (4)

Sea la funcion $f(x,y) := x^{2} + k\cdot x\cdot y + y^{2}$

Buscamos gradiente

$$Df(x,y) := \begin{pmatrix} \frac{d}{dx}f(x,y) \\ \frac{d}{dy}f(x,y) \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2\cdot x + k\cdot y \\ 2\cdot y + k\cdot x \end{pmatrix}$$

$$Df(0,0) \rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Si es punto critico

Buscamos la Hessiana de la funcion

$$H(x,y) := \begin{bmatrix} \frac{d^{2}}{dx^{2}}f(x,y) & \frac{d}{dy}\left(\frac{d}{dx}f(x,y)\right) \\ \frac{d}{dx}\left(\frac{d}{dy}f(x,y)\right) & \frac{d^{2}}{dy^{2}}f(x,y) \end{bmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & k \\ k & 2 \end{pmatrix}$$

Es independiente del punto a evaluar

Buscamos el determinante $|H(x,y)| \rightarrow 4 - k^{2}$

a. Para que sea punto Silla (0,0), este determinante debe ser menor que cero esto es

$$k\varepsilon\ (-\infty,-2) \vee (2,\infty)$$

b.- Para que sea minimo el determinante debe ser mayor que cero y como en el termino a11 es positivo SIEMPRE sera un minimo por lo que para que (0,0) sea minimo debe pasar

$$k\varepsilon\ (-2,2)$$

c.- Para que no concluya el criterio el determinante debe ser cero. Esto ocurre para

$$k := 2 \qquad k := -2$$

FIN. AHORA VENDRA INTEGRALES, Busque sus cuadernos de Mate2 (si no lo quemaron)